PROGETTO GUIDA ALLO STUDIO

MATEMATICA

Introduzione al concetto di derivata

Giovanni Zingales

Introduzione al concetto di derivata

Partiamo da un semplice problema affrontato già in geometria analitica:

Data la parabola di equazione $y = x^2$*, scrivere l'equazione della retta a essa tangente in un suo punto, per es. nel punto* $P(x_0; y_0)$ *di ascissa* $x_0 = 3$ (e quindi di ordinata $y_0 = 9$).

In tale problema, la retta tangente si riguarda come quella retta del piano della parabola che ha in comune con la parabola stessa soltanto un punto: il punto $P(3;9)$. Come lo studente ricorderà (spero!), dal punto di vista analitico il problema si risolve considerando il sistema

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y - 9 = m(x-3) \end{cases}$$

tra l'equazione della parabola e quella di una generica retta passante per $P(3;9)$ e imponendo la condizione di tangenza $\Delta = 0$ per il discriminante dell'equazione risolvente. Si troverà, dopo semplici calcoli, che la retta tangente richiesta è quella di coefficiente angolare $m = 6$, cioè la retta di equazione $y = 6x - 9$.

E' chiaro che il procedimento seguito non dipende da una scelta particolare del punto P (avremmo potuto scegliere per esempio il punto $P(2;4)$, o il punto $P(1;1)$, o un qualsiasi altro punto della parabola: il procedimento non sarebbe cambiato); anzi, lo studente intraprendente potrebbe pensare di risolvere la questione per un qualsiasi punto della parabola, cioè un punto di coordinate $(x_0; y_0)$, con $y_0 = {x_0}^2$, porre quindi la condizione di tangenza $\Delta = 0$ per il discriminante dell'equazione risolvente il sistema

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y - y_0 = m(x - x_0) \end{cases} \quad \text{ovvero} \quad \begin{cases} y = x^2 \\ y - {x_0}^2 = m(x - x_0) \end{cases}$$

e trovare, senza difficoltà, il valore $m = 2x_0$ per il coefficiente angolare della retta tangente alla parabola data in un suo punto qualsiasi di cui sia data l'ascissa x_0 (nell'esempio risolto, si vede subito che il valore trovato $m = 6$ in corrispondenza all'ascissa $x_0 = 3$ è in accordo con la relazione $m = 2x_0$ ora ottenuta).

Questo problema di trovare la retta tangente a una curva in un suo punto è di facile soluzione non solo per la parabola, ma anche per la circonferenza, l'ellisse e l'iperbole, cioè per tutte le curve algebriche del secondo ordine (*coniche*), quelle cioè la cui equazione è di secondo grado; ma è di difficile soluzione quando si esce dal contesto delle coniche e lo si vuole affrontare per una curva qualsiasi

Per fare qualche esempio: come ricavare il coefficiente angolare della retta tangente al grafico della funzione $y = x^3$ per es. nel punto $(2;8)$? oppure della funzione $y = senx$ nel punto $(0;0)$? oppure della funzione $y = e^x$ nel punto $(0;1)$? oppure della funzione $y = \ln x$ nel punto $(1;0)$?

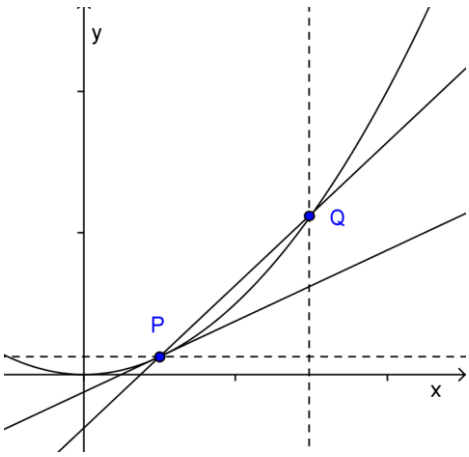
In altre parole, e in modo più formale, domandiamo: data una qualsiasi funzione (di equazione) $y = f(x)$, è possibile scoprire un procedimento generale che permetta di trovare il coefficiente angolare della retta tangente al grafico della funzione data in un suo punto qualsiasi?

È questo il problema matematico che storicamente, nel 1600, ha dato origine al concetto di *derivata*. Non è difficile capire l'idea che sta alla base della soluzione del problema; bisogna però riguardare la retta tangente sotto un altro aspetto, superando la nozione — troppo restrittiva, come si vedrà — di retta tangente come quella retta che ha in comune con la curva un solo punto, e tale che la curva si trovi tutta da un lato, rispetto alla tangente stessa.

Per spiegare l'idea, riprendiamo l'esempio iniziale della retta tangente alla parabola di equazione $y = x^2$, nel punto $P(x_0; y_0)$ di ascissa $x_0 = 3$ (e quindi di ordinata $y_0 = 9$), e ragioniamo come segue. La retta tangente richiesta ha equazione del tipo $y - 9 = m(x-3)$: si tratta di trovare un procedimento generale per determinare il valore del coefficiente angolare m che determina appunto la retta tangente stessa. Pensiamo a un secondo punto Q sulla parabola, "vicino" a P ma distinto da esso, e consideriamo la retta (secante) PQ. Se immaginiamo il punto Q — libero di muoversi sulla parabola — avvicinarsi sempre più al punto P, allora la retta (secante) PQ tenderà ad assumere la posizione della retta tangente in P.

Ecco l'idea nuova: la retta tangente in P deve pensarsi come posizione limite della retta (secante) PQ quando il punto Q, muovendosi sulla parabola, tende a coincidere col punto P. E così, il coefficiente angolare della tangente si otterrà in qualche modo (e lo vedremo) a partire dal coefficiente angolare della secante PQ che, com'è noto dalla geometria analitica, è dato dal rapporto

$$\frac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P}.$$



Nel nostro esempio si ha $(x_P; y_P) = (3;9)$, mentre $(x_Q; y_Q) = (x; x^2)$ in quanto Q è un punto generico della parabola $y = x^2$. Avremo pertanto

$$m_{PQ} = \frac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P} = \frac{x^2 - 9}{x - 3}$$

per il coefficiente angolare della secante PQ; da questa espressione, cercheremo di ottenere il coefficiente angolare m della tangente, facendo tendere Q verso P. Ma ora ci imbattiamo in una difficoltà che sembra insormontabile: quando Q va a coincidere con P, la secante coincide con la tangente; ma questo comporta che l'ascissa x di Q deve essere uguale a quella di P, che vale 3: ecco la difficoltà: se $x = 3$ allora il rapporto prima trovato per m_{PQ} perde di significato in quanto si riduce al rapporto $\frac{0}{0}$!

L'idea sembrava ottima, ma la sua attuazione pratica ci ha condotti (almeno per il momento) in una via senza uscita.

Quale rotta hanno seguito i matematici del '600 per superare questo enorme scoglio?

Per spiegarlo, riprendiamo l'espressione $m_{PQ} = \dfrac{x^2-9}{x-3}$; lo studente attento avrà notato che tale espressione si può semplificare dividendo numeratore e denominatore per $x-3$:

$$m_{PQ} = \frac{x^2-9}{x-3} = x+3;$$

ciò è del tutto lecito in quanto risulta $x-3 \neq 0$, essendo $x \neq 3$ (ricordiamo che si è scelto Q distinto da P). Ora, come trovato all'inizio, il coefficiente angolare della tangente vale 6, per cui ci si pone la domanda: "È una coincidenza che il valore $m=6$ si possa ottenere dall'espressione semplificata di m_{PQ} dando a x proprio il valore 3? " Può darsi che questo risultato sia del tutto casuale, ma certe coincidenze in matematica difficilmente vengono attribuite al caso. D'altra parte, lo studente zelante potrebbe risolvere l'esercizio iniziale cambiando le coordinate del punto P e utilizzando entrambi i procedimenti, quello noto della geometria analitica e quello nuovo appena illustrato; il risultato sarebbe sempre lo stesso: *il coefficiente angolare della tangente si può ottenere da quello della secante sostituendo, nell'espressione semplificata di* m_{PQ} *, l'ascissa* x *del punto* Q *con l'ascissa* x_0 *del punto* P.

Tutto risolto allora? Nemmeno per sogno!

L'espressione di m_{PQ} ha significato − e si può poi semplificare − solo se l'ascissa x di Q è diversa da quella di P, e tale condizione è certamente vera fino a quando Q, pur avvicinandosi indefinitamente a P, rimane distinto da P. È quindi del tutto scorretto semplificare l'espressione di m_{PQ} supponendo $x \neq 3$ e poi, di soppiatto, sostituire in essa proprio $x=3$, dovendo tradurre algebricamente il fatto che la retta PQ da secante diventa tangente quando Q, muovendosi sulla curva, va a coincidere con P.

Ecco il dilemma che i matematici del '600 dovettero affrontare: una bella idea per risolvere il problema della tangente, un procedimento per metterla in atto che a un certo punto si arresta di fronte a un ostacolo serio, vedere il risultato a portata di mano, ma il prezzo da pagare per raggiungerlo è di commettere un gravissimo errore!

Decisi a non rinunciare ai progressi fatti, e convinti che prima o poi una via d'uscita per superare e chiarire l'errore si sarebbe trovata, per circa due secoli i matematici continuarono a utilizzare questi procedimenti "scorretti" dando vita a uno sviluppo prodigioso della moderna matematica del calcolo differenziale e integrale. La questione della correttezza del procedimento fu finalmente stabilita nella seconda metà dell'800 quando venne elaborata una rigorosa teoria dei numeri reali e fu quindi possibile definire in modo rigoroso il concetto di limite. Ma di questo ci occuperemo in altra sede.

Risolviamo ora alcuni esercizi applicando il procedimento appena illustrato.

Lo studente è pregato di non memorizzare in maniera meccanica tale procedimento, ma – almeno per un certo numero di esercizi – di riflettere sui vari passaggi e acquisire piena consapevolezza del loro significato.

1. *Tangente al grafico della funzione* $y = x^3$ *nel punto* P *di ascissa* $x_0 = 2$.

L'ordinata del punto P sarà $y_0 = x_0^{\ 3} = 8$; consideriamo sul grafico della funzione un generico punto Q, distinto da P, e indichiamo con $(x; y)$ le sue coordinate: avremo $Q(x; x^3)$. Il coefficiente angolare della retta (secante) PQ , come sappiamo dalla geometria analitica, è dato da

$$m_{PQ} = \frac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P} = \frac{x^3 - 8}{x - 2}$$

Se immaginiamo di muovere il punto Q avvicinandolo a P, come già discusso, la retta (secante) PQ tenderà ad assumere la posizione della retta tangente richiesta e quindi, il coefficiente angolare della tangente si otterrà dall'espressione di m_{PQ} sopra scritta, ponendo $x = 2$, in quanto l'ascissa di Q deve coincidere con quella di P. Ma con $x = 2$, l'espressione di m_{PQ} diventa indeterminata ($0/0$, e sarà sempre così!). E allora, aggiriamo l'ostacolo, eseguendo due operazioni:

a) semplifichiamo l'espressione di m_{PQ} dividendo numeratore e denominatore per $x - 2$:

$$\frac{x^3 - 8}{x - 2} = \frac{(x-2)(x^2 + 2x + 4)}{x - 2} = x^2 + 2x + 4;$$

(questa operazione è del tutto corretta in quanto $x - 2 \neq 0$, essendo il punto Q distinto dal punto P);

b) sostituiamo ora nell'espressione semplificata $m_{PQ} = x^2 + 2x + 4$ il valore 2 (ascissa di P) a x (che è l'ascissa di Q) in modo da ottenere il coefficiente angolare m della tangente al grafico nel punto P. Il calcolo è semplice; si trova

$$m = 12$$

Questa seconda operazione non è lecita, in quanto l'espressione $m_{PQ} = x^2 + 2x + 4$ è stata ottenuta considerando $x \neq 2$ e quindi non è consentito sostituire in essa proprio il valore $x = 2$!

Come già discusso, il procedimento seguito non è del tutto giustificato, ma "funziona": porta cioè a risultati corretti (come già anticipato, la soluzione di questo paradosso passa attraverso l'operazione di limite).

Completiamo l'esercizio scrivendo l'equazione della retta tangente richiesta. Dalla geometria analitica sappiamo che una retta generica per $P(2;8)$ ha equazione del tipo $y - 8 = m(x - 2)$ e quindi si ottiene la retta tangente sostituendo il valore $m = 12$ prima trovato.

In definitiva, la retta tangente richiesta ha equazione

$$y = 12x - 16$$

A questo punto immagino che qualche studente si starà chiedendo: *Ma che cos'è questa derivata?* Rispondo subito: *la derivata è il coefficiente angolare della retta tangente!*
Ovviamente la derivata non è solo questo; quanto appena affermato riguarda il suo significato geometrico, e in questa introduzione ho voluto ancorare il concetto di derivata alle sue origini storiche. In effetti, insieme al problema delle tangenti, che era un problema matematico, un altro problema — e questo di Fisica —, richiedeva una soluzione; e anche questo portò al concetto di derivata: il problema di trovare la velocità istantanea. Il procedimento si ripete: cambia solo l'interpretazione.
Riprendiamo l'esercizio appena risolto e cambiamone l'interpretazione:

Un punto materiale si muove con legge oraria data dall'equazione $s(t) = t^3$*: si vuole conoscere la sua velocità in un determinato istante*, per esempio l'istante $t_1 = 2$ (secondi).
Consideriamo un istante $t \neq 2$ e valutiamo la velocità media nell'intervallo di tempo $\Delta t = t - 2$; poiché lo spazio percorso in tale intervallo di tempo vale $\Delta s = s(t) - s(2) = t^3 - 2^3 = t^3 - 8$, la velocità media sarà data dal rapporto

$$v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{t^3 - 8}{t - 2}$$

Quanto più l'istante di tempo t si sceglie vicino al valore $t_1 = 2$, tanto più il valore trovato per la velocità media si avvicina al valore richiesto dal problema, cioè la velocità esatta all'istante $t_1 = 2$.

Di nuovo, per avere il valore esatto della velocità istantanea bisogna sostituire nell'espressione della velocità media il valore $t = 2$, e questo (ormai dovrebbe essere chiaro) porta alla forma indeterminata $0/0$. E allora, come per il problema della tangente, anche qui si supera la difficoltà sostituendo il valore $t = 2$ nell'espressione semplificata della velocità media

$$v_m = \frac{t^3 - 8}{t - 2} = t^2 + 2t + 4$$

ottenendo per la velocità all'istante $t = 2$ il valore $v = 12$.

Questo esempio mette quindi in luce un'altra interpretazione della derivata: se si conosce la legge oraria $s = s(t)$ (cioè la legge che esprime lo spazio percorso in funzione del tempo), allora *la derivata fornisce la velocità istantanea*, cioè la velocità che il punto in movimento ha in ogni istante di tempo t.

Di nuovo, qualche studente potrebbe tornare a chiedere: *Ma allora la derivata è il coefficiente angolare o è la velocità istantanea, o entrambi?*
La risposta immediata è: la derivata è sia l'uno che l'altra; e può assumere anche altri significati, dipende dal problema.

È arrivato però il momento di fare un passo avanti e spiegare come si arriva alla definizione formale di derivata, senza fare riferimento alle sue radici storiche.

Per motivi didattici, voglio ancora utilizzare lo stesso esempio, ma adesso in modo più astratto.

Consideriamo la funzione f definita $f(x) = x^3$, e un suo punto, per esempio il punto di ascissa $x_0 = 2$. Per ogni x del dominio D della funzione (nel nostro caso $D = R$), con la condizione che sia $x \neq x_0$ costruiamo il rapporto

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

detto <u>*rapporto incrementale*</u> della funzione relativo al punto x_0. Tale rapporto dipende, oltre che dal fissato valore x_0, dalla scelta di x, cioè è una funzione di x.

Nel nostro esempio, poiché si ha $f(x_0) = f(2) = 2^3 = 8$, il rapporto incrementale, che possiamo indicare anche come $\frac{\Delta f}{\Delta x}$, vale

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{x^3 - 8}{x - 2}$$

Questo rapporto assume la forma indeterminata $0/0$ se $x = 2$.

<u>*La derivata della funzione nel punto di ascissa* $x_0 = 2$ *è,*</u> per definizione, <u>*il valore di tale rapporto quando, dopo aver eliminato*</u> (in un modo o nell'altro) <u>*la causa di indeterminazione*</u> (nel nostro esempio basta semplificare), <u>*si sostituisce* $x = 2$</u>.

Da

$$\frac{x^3 - 8}{x - 2} = \frac{(x-2)(x^2 + 2x + 4)}{x - 2} = x^2 + 2x + 4,$$

con $x = 2$, si ottiene 12, che è *la derivata di* $y = f(x) = x^3$ *nel suo punto di ascissa* $x_0 = 2$.

Per indicare che 12 è la derivata della funzione nel punto $x_0 = 2$, scriveremo

$$f'(2) = 12 \qquad \text{(leggi: } \textit{effe primo di 2 uguale 12}\text{)}$$

E così, in generale, useremo col simbolo

$$f'(x_0)$$

per indicare la derivata della funzione f nel punto $x = x_0$.

Per dare, infine, la definizione rigorosa della derivata, bisogna ricorrere al concetto di limite, nel senso che:

La derivata della funzione f *nel punto* $x = x_0$ *è,* per definizione*, il limite del rapporto incrementale* $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ *quando* $x \to x_0$ (leggi: x *tende a* x_0).

In simboli

$$f'(x_0) := \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

a condizione che *tale limite esista e sia finito* ;
(il simbolo $:=$ viene usato per sottolineare che l'uguaglianza tra i due membri deve essere intesa come una definizione).
Si dirà, in tal caso, che la funzione f è *derivabile* nel punto $x = x_0$.

Nel nostro esempio, la scrittura corretta è

$$f'(2) = \lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 8}{x - 2} = \lim_{x \to 2} (x^2 + 2x + 4) = 12$$

A seconda del tipo di problema, tale derivata sarà intesa come coefficiente angolare della tangente, come velocità istantanea o altro.

È naturale quindi, dopo quanto detto finora, assumere come retta tangente al grafico di una funzione f in un suo punto $P(x_0; y_0)$, la retta passante per P e di coefficiente angolare $m = f'(x_0)$. Detto in modo più formale:

La tangente al grafico di una funzione f *in un suo punto* $P(x_0; y_0)$ *è,* per definizione, *la retta di equazione*

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

Questa nuova definizione di retta tangente coincide con quella già nota per le coniche (rivedere l'esempio della parabola), ma da questa se ne differenzia per tutte le altre curve in quanto, come si vedrà, tale retta tangente, non solo può avere in comune con la curva anche altri punti oltre $P(x_0; y_0)$, ma può anche, in alcuni casi, attraversare il grafico proprio nel punto P (*punti di flesso*)

Il procedimento che porta al calcolo della derivata di una funzione viene detto *derivazione*.
Tale procedimento segue sempre lo stesso schema, indipendentemente sia dal tipo di funzione da derivare, sia dal punto assegnato. È naturale allora pensare di applicarlo, per ogni data una funzione, non a un suo punto particolare ma a un suo punto qualsiasi, e utilizzare il risultato ottenuto per calcolare poi la derivata in modo immediato — cioè senza di volta in volta ripetere il procedimento di derivazione — non appena sia assegnato un punto particolare della funzione data.

Per chiarire quanto appena detto, risolviamo l'esercizio precedente calcolando la derivata della funzione f definita $f(x) = x^3$, non nel suo particolare di ascissa $x_0 = 2$, ma bensì in un suo punto qualsiasi (assegnato ma non fissato in particolare) la cui ascissa indichiamo con x_0.

Il rapporto incrementale relativo a tale punto sarà

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{x^3 - {x_0}^3}{x - x_0} = x^2 + x_0 x + {x_0}^2$$

Da cui

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{x^3 - {x_0}^3}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} (x^2 + x_0 x + {x_0}^2) = 3{x_0}^2$$

cioè, *la derivata della funzione* f definita $f(x) = x^3$, *calcolata nel suo punto di ascissa* x_0, *vale* $3{x_0}^2$.

In simboli

$$f'(x_0) = 3{x_0}^2$$

Scegliendo $x_0 = 2$, avremo $f'(2) = 3 \cdot 2^2 = 12$ (in accordo con quanto già trovato); se scegliamo, per esempio $x_0 = -1$, avremo $f'(-1) = 3 \cdot (-1)^2 = 3$; e così via, per qualsiasi punto, senza che sia necessario ripetere, di volta in volta, il procedimento di derivazione.

Ricordo che tale procedimento è stato già applicato alla funzione $y = x^2$ trovando $f'(x_0) = 2x_0$.

Lo studente volenteroso che volesse applicare il procedimento di derivazione alla funzione f definita $f(x) = x^4$, troverebbe $f'(x_0) = 4{x_0}^3$; e quindi lo studente intuitivo potrebbe pensare che per la funzione $f(x) = x^5$, la derivata sia $f'(x_0) = 5{x_0}^4$ (provare!) e scoprire così una prima importantissima regola per calcolare la derivata di funzioni polinomiali.

Analizziamo infine due casi particolarmente semplici ma molto importanti.

a) la funzione f è definita da $f(x) = x$

In tal caso, il rapporto incrementale si riduce a

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{x - x_0}{x - x_0} = 1$$

E quindi, molto semplicemente, si conclude che

$$f'(x) = 1 \quad (\textit{in qualunque punto})$$

A parole:

<u>*la derivata della variabile indipendente* x *è uguale a 1;*</u>

(questo risultato è del tutto ovvio dal punto di vista geometrico: la funzione in questione ha per grafico la retta bisettrice del I e III quadrante, il cui coefficiente angolare è 1).

b) La funzione f è *costante* ; risulta cioè $f(x) = k$, per ogni x (k è un numero reale qualsiasi).

In tal caso, il rapporto incrementale si riduce a

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{k - k}{x - x_0} = 0$$

E quindi: *la derivata di una funzione costante (cioè di un numero) vale sempre* 0.

Concludo questa prima parte con una osservazione importante. In questa introduzione al concetto di derivata ho, per ovvie ragioni didattiche, considerato solo funzioni polinomiali (che in Analisi matematica sono le più semplici funzioni da studiare), in modo da evitare inutili difficoltà di calcolo di limiti e il rischio di far passare in secondo piano il concetto stesso di derivata e il procedimento di derivazione che conduce al calcolo effettivo della derivata.

Allo scopo di evitare delle false convinzioni, difficili poi da correggere, voglio chiarire subito che il punto cruciale del procedimento di derivazione, cioè il calcolo del limite del rapporto incrementale quando $x \to x_0$, solo in pochi casi si risolve con una semplificazione; in generale, invece, ogni tipo particolare di funzione richiede una particolare procedura di calcolo e anche l'uso di teoremi della teoria dei limiti.
Qualche esempio può essere utile per la comprensione del problema.

1. Derivata della funzione esponenziale $f(x) = e^x$.

Si ha: $f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{e^x - e^{x_0}}{x - x_0}$

Si vede subito che qui non c'è niente da semplificare! E lo stesso vale per i due esempi seguenti:

2. Derivata della funzione logaritmo naturale $f(x) = \ln x$.

Si ha : $f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{\ln x - \ln x_0}{x - x_0}$

3. Derivata della funzione seno $f(x) = senx$.

Si ha : $f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{senx - senx_0}{x - x_0}$

Questi esempi sono sufficienti per capire la diversità dei casi possibili; il tentativo di semplificare (come nel caso delle funzioni polinomiali), qui proprio è destinato al fallimento: occorrono nuove idee!

Esercizi proposti.

Calcolare la derivata delle seguenti funzioni in un assegnato punto di ascissa x_0; analizzare quindi i risultati ottenuti per individuare – in questa fase in modo intuitivo – alcune importanti regole per il calcolo diretto delle derivate (evitando cioè il procedimento di derivazione).

1. $f(x)=\sqrt{x}$ R. $\left[f'(x_0)=\dfrac{1}{2\sqrt{x_0}};\ (x_0>0)\right]$

2. $f(x)=\dfrac{1}{x}$ R. $\left[f'(x_0)=-\dfrac{1}{{x_0}^2};\ (x_0\neq 0)\right]$

3. $f(x)=4x^2$ R. $\left[f'(x_0)=4\cdot 2x_0=8x_0\right]$

4. $f(x)=-5x^3$ R. $\left[f'(x_0)=-5\cdot 3{x_0}^2=-15{x_0}^2\right]$

5. $f(x)=3\sqrt{x}$ R. $\left[f'(x_0)=\dfrac{3}{2\sqrt{x_0}};\ (x_0>0)\right]$

6. $f(x)=\dfrac{2}{x}$ R. $\left[f'(x_0)=-\dfrac{2}{{x_0}^2};(x_0\neq 0)\right]$

7. $f(x)=3\sqrt{x}+1$ R. $\left[f'(x_0)=\dfrac{3}{2\sqrt{x_0}};\ (x_0>0)\right]$

8. $f(x)=\dfrac{2}{x}-3$ R. $\left[f'(x_0)=-\dfrac{2}{{x_0}^2};\ (x_0\neq 0)\right]$

9. $f(x)=x^3+x$ R. $\left[f'(x_0)=3{x_0}^2+1\right]$

10. $f(x)=x^3-2x$ R. $\left[f'(x_0)=3{x_0}^2-2\right]$

11. $f(x)=x^3+x^2$ R. $\left[f'(x_0)=3{x_0}^2+2x_0\right]$

12. $f(x)=x^3+x^2+5$ R. $\left[f'(x_0)=3{x_0}^2+2x_0\right]$

13. $f(x)=-2x^3+3x^2+5x-7$ R. $\left[f'(x_0)=-2\cdot 3{x_0}^2+3\cdot 2x_0+5=-6{x_0}^2+6x_0+5\right]$

14. $f(x)=5x^3+3x^2$ R. $\left[f'(x_0)=5\cdot 3{x_0}^2+2\cdot 3x_0=15{x_0}^2+6x_0\right]$

15. $f(x)=5x^3+3x^2-4$ R. $\left[f'(x_0)=5\cdot 3{x_0}^2+2\cdot 3x_0=15{x_0}^2+6x_0\right]$

16. $f(x)=2x^3-5x^2$ R. $\left[f'(x_0)=3\cdot 2{x_0}^2-2\cdot 5x_0=6{x_0}^2-10x_0\right]$

17. $f(x)=2x^3-5x^2+10$ R. $\left[f'(x_0)=3\cdot 2{x_0}^2-2\cdot 5x_0=6{x_0}^2-10x_0\right]$

18. $f(x)=2\sqrt{x}+\dfrac{1}{x}$ R. $\left[f'(x_0)=\dfrac{2}{2\sqrt{x_0}}+\left(-\dfrac{1}{{x_0}^2}\right)=\dfrac{1}{\sqrt{x_0}}-\dfrac{1}{{x_0}^2};\ (x_0>0)\right]$

Le regole di calcolo immediato della derivata cui si accennato sopra, possono essere espresse simbolicamente come segue:

1) Se $f(x) = x^n$, allora $f'(x_0) = n \cdot x_0^{\,n-1}$;
2) Se $f(x) = k \cdot g(x)$, allora $f'(x_0) = k \cdot g'(x_0)$ (*k* è un numero reale qualsiasi);
3) Se $f(x) = g(x) + h(x)$, allora $f'(x_0) = g'(x_0) + h'(x_0)$.

La regola 2) può esprimersi a parole dicendo che: *la derivata del prodotto di una costante per una funzione è uguale al prodotto della costante per la derivata della funzione stessa*.

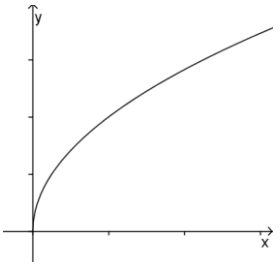
La regola 3) dice che *la derivata della somma di due funzioni si ottiene sommando le derivate delle rispettive funzioni*.

Si vedrà poi che esistono regole di calcolo diretto anche per la derivata di una funzione prodotto di due funzioni, e per la derivata di una funzione quoziente di due funzioni.

Osservazioni importanti.

1. In tutti o quasi tutti gli esercizi proposti, le funzioni date sono derivabili in qualsiasi punto del loro dominio; questa però non deve assumersi come regola generale. Se si considera, per esempio, l'esercizio 1) − e lo stesso vale per il 5) e il 7) – si nota che la funzione data $f(x) = \sqrt{x}$ ha per dominio l'intervallo $D = [0;\ +\infty)$, ma è derivabile nell'intervallo $D' = (0;\ +\infty)$; la funzione cioè – per essere chiari − è definita anche per $x = 0$, ma in tale punto non è derivabile in quanto la derivata $f'(x_0) = \dfrac{1}{2\sqrt{x_0}}$ non esiste in $x_0 = 0$.

   Ricordando che il grafico della funzione $f(x) = \sqrt{x}$ è la metà della parabola di equazione $x = y^2$ situata nel I quadrante, la non derivabilità nel punto $x_0 = 0$ (vertice), in questo caso, riflette il fatto (geometrico) che la tangente al grafico della funzione nel punto $x_0 = 0$ è una retta verticale (asse *y*) e quindi il suo coefficiente angolare non è definito, o, se si preferisce, è infinito.
   Vedremo più da vicino, a tempo debito, questi punti del grafico di una funzione in cui la tangente è una retta verticale.



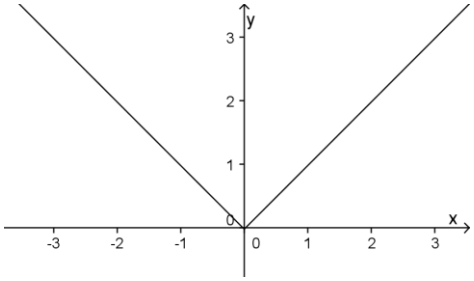
2. Un esempio di funzione in cui la non derivabilità in un punto riflette la circostanza geometrica che la tangente al grafico in quel punto proprio non esiste, è dato dalla funzione <u>*valore assoluto*</u>

$$f(x) = |x|$$

il cui grafico è rappresentato dalle due semirette bisettrici del I e del II quadrante (i cui coefficienti angolari sono, rispettivamente, 1 e -1), uscenti dall'origine.

L'origine rientra tra i cosiddetti punti *angolosi*; in tali punti non è possibile tracciare la retta tangente al grafico della funzione.

Anche questi punti saranno studiati a tempo debito.



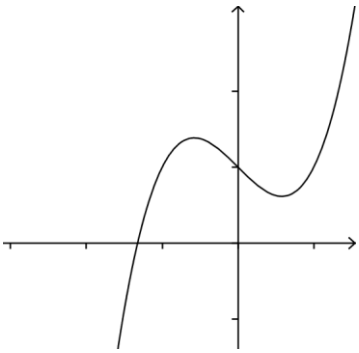
3. Non è forse inutile osservare esplicitamente – dopo quanto appena detto – che il grafico di una funzione derivabile deve presentarsi *liscio*, privo cioè di punti angolosi.

4. La derivabilità (cioè la *liscezza* del grafico), presuppone la continuità (altrimenti non si potrebbe disegnare la tangente); in modo più formale:

   se una funzione f *in un punto è derivabile allora in quel punto* f *dev'essere continua*;

   ovvero: la continuità è *condizione necessaria* per la derivabilità.

   (Questo teorema − come tutti i teoremi di Analisi, del resto − si dimostra come vedremo in modo rigoroso senza ricorso all'intuizione geometrica).



5. La funzione *valore assoluto* $f(x) = |x|$ rappresenta un esempio di funzione che in un punto, il punto $O(0;0)$, è continua ma non derivabile: la continuità, pertanto, è condizione necessaria ma *non sufficiente* per la derivabilità.

* * * *

Dalla derivata alla *funzione derivata*

In questa ultima parte vedremo come sia possibile, a partire da una funzione derivabile f, costruire la *funzione* − indicata di solito con f' − detta *derivata prima* di f. Il dominio D' della f' è l'insieme di tutti i punti del dominio D di f in cui questa è derivabile (abbiamo prima osservato che una funzione non sempre è derivabile in tutti i punti del suo dominio); il codominio, o meglio, l'insieme immagine di f' è l'insieme di tutti i valori $f'(x)$ con $x \in D'$; qui $f'(x)$ deve intendersi come la derivata di f calcolata nel punto x.

Facciamo subito un esempio. Partendo da $f(x) = x^3$, si è trovato $f'(x_0) = 3{x_0}^2$. Questa è la derivata della f calcolata nel punto x_0, e come tale è un numero; per esempio se $x_0 = 4$, sarà $f'(4) = 3 \cdot 4^2 = 48$. La funzione f' associa ad ogni x il valore (numerico) della derivata di f calcolato proprio nel punto x; in altri termini, la funzione derivata prima di $f(x) = x^3$ è la funzione f' definita da

$$f'(x) = 3x^2 .$$

Molto spesso di dice semplicemente *derivata prima*, o addirittura solo *derivata*, per riferirsi alla f', omettendo di dire che si tratta della funzione derivata; può nascere quindi il dubbio se intendere il termine come numero (la derivata calcolata in un punto) ovvero come funzione. Di solito dal contesto è chiaro cosa intendere; tuttavia, è opportuno che lo studente capisca bene la differenza tra i due concetti.

(Si potrebbero riprendere gli esercizi di pag. 10 e, per ciascuna funzione data, scrivere la funzione derivata. Per esempio:
la derivata di $f(x) = \sqrt{x}$ è $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ $(x > 0)$; di $f(x) = \dfrac{1}{x}$ è $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$ $(x \neq 0)$;
di $f(x) = 5x^3 + 3x^2 - 4$ è $f'(x) = 15x^2 + 6x$; e cosi per tutte le altre).

A questo punto, i miei complimenti a chi si ponga la domanda se una data funzione, oltre che come funzione in sé, può riguardarsi – se il caso − come funzione derivata di un'altra. Ciò vuol dire chiedersi, in altre parole, se esiste l'operazione inversa della derivata.
La questione è di grande importanza e non può essere affrontata in questa fase. Qui posso solo dire che la risposta è affermativa, e che tale operazione viene detta *integrazione indefinita* (o anche, per qualcuno, *antiderivata*); ma devo subito aggiungere che, in generale, tale operazione − quando applicabile − presenta

non poche difficoltà. Vi sono comunque tanti casi semplici: un esempio è dato dalle funzioni polinomiali, come il seguente.

La funzione f definita in $\boldsymbol{R}$ da

$$f(x) = 4x^3 - x^2 + 10,$$

può pensarsi come la derivata della funzione F definita in $\boldsymbol{R}$

$$F(x) = x^4 - \frac{1}{3}x^3 + 10x;$$

risulta infatti

$$F'(x) = 4x^3 - \frac{1}{3}(3x^2) + 10 = 4x^3 - x^2 + 10 = f(x).$$

Si dice allora che la funzione F è <u>una</u> (funzione) <u>*primitiva*</u> di f.

L'articolo indeterminativo sottolinea il fatto che f non ha una sola primitiva; in altri termini, l'operazione inversa della derivata non porta a un unico risultato. Infatti, insieme alla primitiva F, sono primitive di f tutte le funzioni definite da

$$G(x) = F(x) + c,$$

ovvero, tutte le funzioni ottenute da F mediante l'aggiunta di un'arbitraria costante numerica.

Risulta infatti

$$G'(x) = F'(x) = f(x)$$

in quanto una costante ha sempre derivata nulla.

Per tornare all'esempio proposto, sono primitive di f tutte le funzioni definite da

$$G(x) = x^4 - \frac{1}{3}x^3 + 10x + c$$

dove c può assumere un qualunque valore numerico.

Farebbe cosa intelligente e utile lo studente che, dopo aver calcolato la (funzione) derivata di una data funzione, si esercitasse a escogitare, da solo, il modo di invertire il procedimento di derivazione: così facendo, anche se in modo inconsapevole, comincerebbe a calcolare *integrali indefiniti*!