PROGETTO GUIDA ALLO STUDIO

MATEMATICA

SUL CONCETTO DI FUNZIONE

PARTE I

Giovanni Zingales

SUL CONCETTO DI FUNZIONE

Introduzione.

La nozione di *funzione* è alla base dello sviluppo della matematica moderna (insieme con quella di *limite*). Prima di addentrarci in una analisi approfondita, discutiamo alcuni semplici esempi.

a) Un chilo di mele costa (in offerta!) 0.90 euro: quanto spendi se vai dal fruttivendolo? E' chiaro che la somma da spendere *dipende* dalla quantità di mele da acquistare: la somma y è cioè, come si dice anche nel linguaggio comune, *funzione* della quantità x di mele da acquistare. Come possiamo esprimere la dipendenza di y da x ? La risposta è semplice: si ha

$$y = 0{,}90x$$

(se acquisto mezzo chilo spendo 45 centesimi, se acquisto 2 chili spendo 1,80 euro, ecc.).

b) Il punteggio y ottenuto in un test a risposta multipla, in cui ogni risposta esatta è valutata 1,5 punti, è *funzione* del numero x di risposte esatte date (si suppone che le risposte errate e quelle non date valgano zero punti). Anche in tal caso la dipendenza di y da x è espressa dalla legge di proporzionalità diretta

$$y = 1{,}5x$$

c) L'area y di un quadrato è una *funzione* della misura x del suo lato, secondo la legge

$$y = x^2 .$$

d) Il moto di caduta libera di un corpo, in prossimità della superficie terrestre, segue la legge

$$y = 4{,}9x^2;$$

in questo caso la variabile y esprime la distanza percorsa dal corpo in *funzione* del tempo x trascorso (in Fisica scriviamo $s = \frac{1}{2}gt^2$, con g accelerazione di gravità, il cui valore è posto uguale a $9{,}8m/s^2$): in 1 secondo il corpo percorre in caduta $4{,}9$ metri, in 2 secondi $4{,}9 \times 2^2 = 19{,}6$ metri, e così via, fino a quando il corpo tocca il suolo.

Il tempo di caduta è a sua volta una funzione dell'altezza h da cui il corpo viene lasciato cadere, secondo la legge $t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$, dove h gioca il ruolo di variabile indipendente x, mentre t qui prende il posto della variabile dipendente y, per cui potremmo esprimere tale legge − senza riferimento alle grandezze fisiche rappresentate − scrivendo

$$y = \sqrt{\frac{x}{4{,}9}}.$$

Esistono anche funzioni di più variabili; per esempio, l'area di un rettangolo è funzione delle misure delle sue dimensioni; e per fare un esempio anche dalla fisica, possiamo richiamare la legge di stato dei gas perfetti $pV = nRT$ secondo cui, ognuna delle tre grandezze p (pressione), V (volume), T (temperatura assoluta) è esprimibile in funzione delle altre due.

Gli esempi proposti − che possono essere moltiplicati senza limiti (e invito lo studente-lettore a farlo) −, bastano a dare l'idea della varietà di contesti in cui tale concetto riesce utile per la descrizione matematica di situazioni anche molto diverse tra loro; ma possono dare anche l'idea – in verità fuorviante −, che tale concetto sia, in certo modo, semplice. La storia della matematica insegna invece, che per avere una prima definizione esplicita del concetto di funzione bisogna attendere l'anno 1667; e da allora, sarebbero dovuti trascorrere quasi altri duecento anni per avere, dopo varie rielaborazioni, la definizione di funzione oggi comunemente adottata, dovuta al matematico tedesco *Dirichlet* (1837).

<u>Definizione (di Dirichlet)</u>

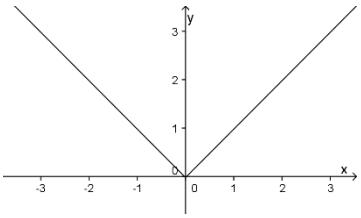
Una variabile y *è* <u>*funzione*</u> *di una variabile* x *in un certo intervallo* (di numeri reali), *se esiste una legge* (di natura qualsiasi) *che permetta di associare ad ogni valore di* x *un unico valore di* y.

E si aggiunga che non ha alcuna importanza se in questo intervallo y dipende da x secondo una o più leggi, né se la dipendenza di y da x può essere espressa mediante operazioni matematiche.

La parte essenziale della definizione pretende che ad *ogni* valore di x la legge associ *uno e un solo* valore di y. La locuzione *uno e uno solo*, che dal punto di vista del linguaggio ordinario suona ridondante, ha invece qui – e in tutti i casi in cui viene usata nel linguaggio matematico – un suo caratteristico significato: di una grandezza, si vuole affermare, con precisione, l'esistenza e l'unicità: nel nostro caso, si afferma che *esiste* un valore di y per ogni x, e tale valore di y è *unico*.

Un secondo aspetto da sottolineare è che – diversamente da quello che pensavano i matematici durante tutto il '700, secondo i quali una funzione doveva essere descritta nel suo insieme di definizione per mezzo di una singola espressione analitica (appartengono a questa categoria tutti gli esempi proposti sopra) –, la definizione moderna di funzione contempla la possibilità che una funzione possa essere descritta anche da più espressioni algebriche. Un semplice e importante esempio a tal riguardo è dato dalla funzione *valore assoluto*, definita come segue:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{per } x \geq 0 \\ -x & \text{per } x < 0 \end{cases}$$



il cui grafico, com'è noto, è l'insieme delle due semirette bisettrici del I e del II quadrante (V. figura accanto).

Un altro importante – ma meno semplice – esempio è dato dalla cosiddetta funzione di Dirichlet:

$$d(x) = \begin{cases} 1 & \text{per } x \text{ razionale} \\ 0 & \text{per } x \text{ irrazionale} \end{cases}$$

(il cui grafico … è impossibile da tracciare!). L'esempio di Dirichlet (come tanti altri proposti da vari matematici nel corso dell'800), costrinse i matematici a superare l'idea – diffusa durante tutto il '700, e anche oltre –, che ogni funzione, non solo si potesse rappresentare graficamente, ma che il grafico si potesse tracciare con continuità senza sollevare la matita dal foglio, almeno a tratti.

Un terzo aspetto degno di approfondimento, riguarda la possibilità di esprimere la relazione tra le variabili x e y mediante operazioni matematiche: esistono infatti funzioni numeriche che risulta impossibile definire analiticamente. Un esempio semplice e importante è il seguente.

Si assegni un numero naturale n, e si faccia ad esso corrispondere il numero – indicato con $\pi(n)$ – dei numeri primi minori di n; per esempio, se $n = 10$, poiché i numeri primi minori di 10 sono 4, e precisamente: 2,3,5,7 (si ricordi che il numero 1 non rientra tra i numeri primi) si ha $\pi(10) = 4$; e così, per esempio, $\pi(12) = 5$, $\pi(20) = 8$, ecc. Qual è il punto? Per assegnare, per esempio, il valore $\pi(10) = 4$, bisogna *contare* quanti sono i numeri primi minori di 10: non c'è altro modo; non esiste cioè alcuna formula che permetta di fare il calcolo diretto! La funzione $\pi(n)$ è pertanto una funzione matematica ben definita, e anche importante in teoria dei numeri, che però non può essere espressa analiticamente per mezzo di una formula.

1. *Concetto di funzione.*

La definizione di funzione data da Dirichlet viene oggi riformulata in modo più generale, passando da un intervallo a un insieme qualsiasi, nel modo seguente:

Definizione.

Dati due insiemi A e B, si dice funzione di A in B, e si scrive $f : A \to B$, una qualsiasi legge che associa ad ogni elemento di A uno e un solo elemento di B.

L'insieme A è detto *insieme di definizione* o *dominio* della funzione; l'insieme B è detto *codominio*.

Per indicare che all'elemento $x \in A$ la funzione f associa l'elemento $y \in B$, o anche − detto in altro modo −, che l'elemento $y \in B$ è il corrispondente, secondo f, dell'elemento $x \in A$, si scrive, con la notazione introdotta da Eulero nel 1734,

$$y = f(x) \qquad \text{(leggi: “ } y \text{ uguale effe di } x \text{”)}$$

Si dice che x è la variabile *indipendente*, e y è la variabile *dipendente.*

Si dice anche, e spesso, che “ $f(x)$ è l'*immagine* di x secondo f ”. E così, chiamiamo *insieme immagine*, o semplicemente *immagine* di A secondo f, e lo indichiamo con $f(A)$, l'insieme di tutti gli elementi di B che sono immagini di un qualche elemento di A. Ne consegue che $f(A)$ è un sottoinsieme di B.

Il concetto di funzione, come risulta dalla definizione, e come anticipato nell'introduzione, è molto generale. Non occorre fare alcuna ipotesi sulla natura degli elementi dei due insiemi A e B né sul tipo di legge − anche più di una −, che fa corrispondere gli elementi degli stessi insiemi; l'essenziale è che *ad ogni* elemento di A – senza eccezioni – corrisponda *un* elemento di B *e uno solo*.

Nel seguito, studieremo principalmente funzioni numeriche, e precisamente, *funzioni reali di variabile reale*, ovvero funzioni che hanno come dominio un sottoinsieme dell'insieme $\mathbf{R}$ dei numeri reali (eventualmente tutto $\mathbf{R}$) e come codominio l'insieme $\mathbf{R}$ stesso.

Di tali funzioni è possibile dare una rappresentazione grafica considerando, nel piano cartesiano, tutti i punti $P(x; y)$ aventi ascissa x appartenete al dominio della funzione f, e come corrispondente ordinata y, l'immagine di x secondo f. In altri termini, il *grafico* di una funzione f è l'insieme di tutti i punti di coordinate $(x; f(x))$ con x appartenete al dominio di f.

Alcune importanti note prima di procedere.

a) È molto comodo in pratica — e quindi di larghissimo uso — riferirsi a una funzione dicendo:

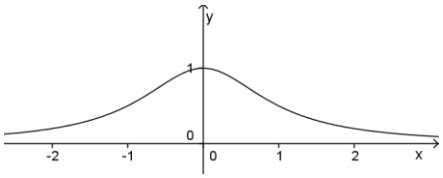
— *È data la funzione* $y = f(x)$, per esempio, $y = 3x^2$ (o anche $f(x) = 3x^2$, e dal contesto è chiaro che x e y sono variabili reali) anziché, come sarebbe corretto : — *È data la funzione* $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *che ad ogni* $x \in \mathbf{R}$ *associa il numero* $3x^2$ (in simboli, $x \to 3x^2$). Il punto che voglio chiarire è che, per restare nel nostro esempio, la funzione f data associa ad ogni numero reale x quel numero reale y che si ottiene elevando x al quadrato e moltiplicando tale potenza per 3; cioè, $y = 3x^2$ *è il valore* che la funzione f associa ad ogni x, *non è la funzione stessa*! Comunque sia, l'uso (o, per qualcuno, l'abuso) è ormai ben radicato in quanto rappresenta una pratica e comoda abbreviazione, a cui non si vuole rinunciare; tuttavia, la precisazione fatta è opportuno tenerla ben presente.

b) Non sempre gli autori di libri di testo concordano su cosa intendere per codominio di una funzione; alcuni autori identificano il codominio di una funzione con l'insieme immagine e altri no; altri ancora lasciano un po' vaga la questione. La mia posizione è la seguente, e per chiarirla voglio considerare un esempio piuttosto concreto. Si abbia la funzione f tra gli alunni presenti in classe un dato giorno e le sedie disponibili nell'aula. Per motivi vari (per esempio, alcuni alunni quel giorno sono assenti, oppure qualcuno ha portato via delle sedie, ecc,), non è detto che il numero degli alunni presenti coincida col quello delle sedie disponibili. Il dominio di f, chiaramente, è l'insieme A degli alunni presenti: e il codominio? Per me la risposta è chiara: il codominio di questa funzione è l'insieme B di tutte le sedie disponibili al momento; e quando poi tutti gli alunni si saranno seduti, ovvero la funzione avrà fatto il suo mestiere, assegnando a ogni alunno una sedia, dirò che l'insieme immagine $f(A)$ è l'insieme di tutte le sedie occupate. Se tutte le sedie risulteranno occupate allora sarà $f(A) = B$; se invece dovessero rimanere sedie libere, l'insieme immagine $f(A)$ sarà un sottoinsieme di B, distinto da B (sottoinsieme *proprio*).

Per avvalorare l'opportunità di distinguere il codominio dall'immagine, considero ora un esempio di funzione numerica, e precisamente la funzione f definita dalla formula

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

Tutti d'accordo che il dominio è l'insieme $\mathbf{R}$; e il codominio? Per me nessun dubbio: anche il codominio è $\mathbf{R}$ (come per tutte le funzioni reali di variabile reale, in base alla definizione data sopra); chi identifica il codominio con l'immagine, ne converrà che non è immediato rispondere che tale codominio, o, se si vuole, l'immagine di tale funzione, è l'insieme di tutti i numeri compresi tra 0 (escluso) e 1 (incluso), come risulta dal grafico in figura.



Quanto appena detto, conduce a porre la seguente

Definizione. *Una funzione* $f : A \to B$ *si dice suriettiva* (o *surgettiva*) *se risulta* $f(A) = B$

A parole: una funzione si dice *suriettiva* se il suo codominio coincide con l'insieme immagine; ciò vuol dire che ogni elemento del codominio B è l'immagine di (almeno) un elemento del dominio A.

c) Ancora una questione importante che alla mente di molti alunni non si presenta con la necessaria chiarezza. Che una funzione associ ad ogni elemento del dominio uno e un solo valore del codominio, la definizione lo afferma con assoluta nettezza; ma questo non vuol dire − come tanti studenti sono portati erroneamente a concludere −che ogni elemento del codominio dev'essere corrispondente di un solo elemento del dominio. Una breve riflessione mostra subito che, nell'esempio precedente − sebbene praticamente sconveniente e scomodo −, non sarebbe in contrasto con il concetto di funzione la circostanza che due (o anche più di due) alunni occupassero la medesima sedia. E' quello che si verifica nel caso dell'esempio numerico proposto: se si considerano due valori di x opposti, per esempio -2 e 2, a essi la funzione associa lo stesso valore, e precisamente $\frac{1}{5}$ perché $\frac{1}{1+(-2)^2} = \frac{1}{1+(2)^2} = \frac{1}{5}$

Quanto detto, conduce a porre la seguente

Definizione. *Una funzione* $f : A \to B$ *si dice iniettiva se è tale da far corrispondere a elementi diversi del dominio, elementi diversi del codominio*. In simboli: se $x_1 \neq x_2$ allora $f(x_1) \neq f(x_2)$.

d) A conclusione di questa parte, è naturale anche dare quest'altra

Definizione. *Una funzione* $f : A \to B$ *si dice biiettiva se è sia suriettiva sia iniettiva*.

In tal caso, non solo ad ogni elemento di A corrisponde, secondo f, uno e un solo elemento di B, ma si ha anche che $f(A) = B$; e si ha, inoltre, che ogni elemento di B è immagine di un *solo* elemento di A. Segue da qui la possibilità di definire una nuova funzione che abbia come dominio B e come codominio A e che inverta la corrispondenza stabilita dalla funzione f, nel senso che, se un elemento $x_1 \in A$ ha come corrispondente, secondo f, l'elemento $y_1 \in B$, allora questa nuova funzione — che viene detta funzione *inversa* di f, e indicata col simbolo f^{-1} — associa all'elemento $y_1 \in B$ l'elemento $x_1 \in A$; e per indicare ciò scriveremo $x_1 = f^{-1}(y_1)$. Una funzione $f : A \to B$ che sia biiettiva ammette quindi la funzione inversa $f^{-1} : B \to A$ tale che $x = f^{-1}(y)$; tra gli insiemi A e B viene allora a stabilirsi una *corrispondenza biunivoca*: ad ogni elemento di A corrisponde uno e un solo elemento di B e, viceversa, ad ogni elemento di B corrisponde uno e un solo elemento di A, nel senso spiegato prima. In tal caso i due insiemi avranno ovviamente lo stesso numero di elementi, e questo vale anche se sono insiemi infiniti!

2. *Le funzioni elementari in Analisi*

Quali sono le funzioni che si studiano in analisi matematica?

In effetti, si può dire che sostanzialmente tutte le funzioni studiate in analisi, almeno per quanto riguarda il programma di Liceo, si possono far risalire ai seguenti tipi di funzioni: le funzioni *polinomiali*, le *esponenziali* e *logaritmiche*, le *trigonometriche*.

2.1 Le funzioni *polinomiali*

Sono le più semplici da studiare. Come si vedrà, sono funzioni *continue* su tutto $\boldsymbol{R}$, il calcolo dei *limiti* è immediato, e non presentano problemi né il calcolo delle *derivate* né quello degli *integrali*.

Per indicare una funzione polinomiale generale, scriveremo

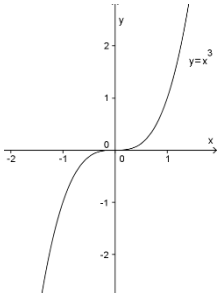
$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0$$

dove i coefficienti a_i sono numeri reali mentre gli esponenti sono numeri naturali.

In effetti le funzioni polinomiali sono costruite a partire dalle funzioni *potenza* x^n (con n, appunto, numero naturale). Un esempio interessante di funzione potenza è la cosiddetta *parabola cubica*, la cui equazione è

$$f(x) = x^3$$

il cui grafico è riportato in figura.



Ovviamente, tra le funzioni polinomiali rivestono particolare importanza

le funzioni *lineari*

$$y = mx + q \qquad (\textit{retta} \text{ di coefficiente angolare } m)$$

e le funzioni *quadratiche*

$$y = ax^2 + bx + c \quad (\textit{parabola} \text{ con asse di simmetria parallelo all'asse } y)$$

che trovano largo uso nelle applicazioni (si pensi alla legge oraria del moto rettilineo uniforme o al moto di un proiettile).

2.2 Dal rapporto di due funzioni polinomiali nascono poi le *funzioni razionali fratte*; tra queste ricordiamo qui la cosiddetta *funzione omografica*

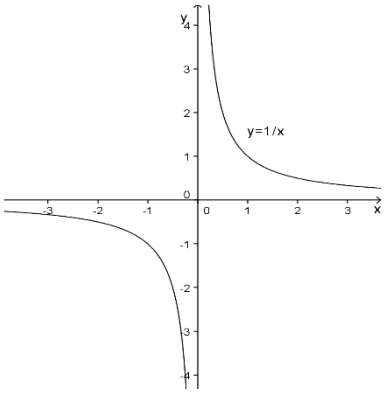
$$y = \frac{ax+b}{cx+d}$$

il cui grafico è un'*iperbole equilatera* avente come *asintoti* le rette di equazione $x = -\frac{d}{c}$ e $y = \frac{a}{c}$;

un caso particolarmente importante è dato dall'iperbole

$$y = \frac{1}{x}$$

i cui asintoti coincidono con gli assi cartesiani (*iperbole equilatera riferita agli asintoti*).



2.3 *La funzione esponenziale*

A differenza delle funzioni potenza, che hanno la base variabile e l'esponente fisso, la funzione esponenziale

$$f(x) = a^x$$

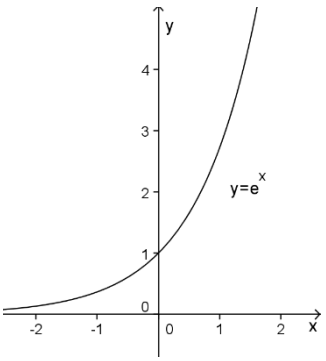
ha la base *a* fissa e l'esponente *x* variabile. L'esponente *x* può assumere qualunque valore reale mentre la base *a* dev'essere un numero reale *positivo*.

Un caso di particolare importanza si ha con $a = e$, dove $e = 2{,}71...$ (i puntini di sospensione stanno a indicare che si tratta di un numero irrazionale) è il cosiddetto numero di Nepero (o di Eulero).

Il grafico della funzione esponenziale

$$f(x) = e^x$$

è riportato nella figura accanto.



2.4 *La funzione logaritmica*

La funzione logaritmica (che è l'inversa della funzione esponenziale), è definita dall'equazione

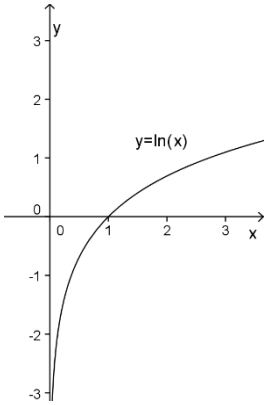
$$f(x) = log_a x$$

con a un numero reale *positivo* e diverso da 1.

Ovviamente, anche per la funzione logaritmica si ha il caso importante in cui la base a coincide col numero e; si parla in tal caso di logaritmo *naturale* e si usa la scrittura

$$f(x) = \ln(x)$$

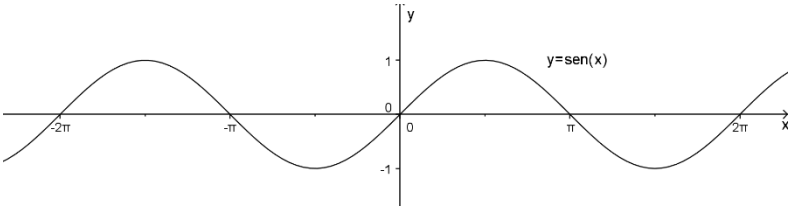
in cui, appunto, si sottintende implicitamente la base e.



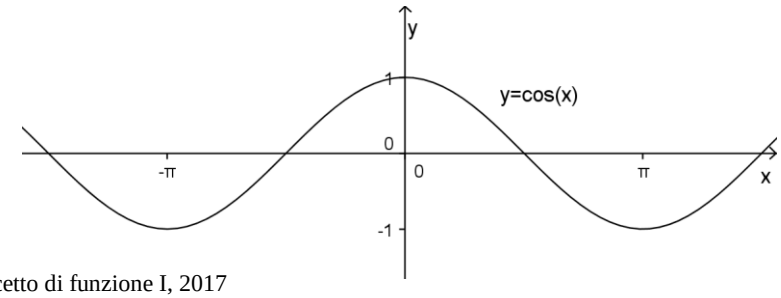
2.5 *Le funzioni trigonometriche*

Le funzioni trigonometriche sono le prime funzioni periodiche che si incontrano; come tali, sono adatte, per esempio in Fisica, per lo studio dei moti periodici. Nella loro definizione, la variabile x, di norma, deve essere intesa come la misura dell'angolo in radianti. Scriviamo:

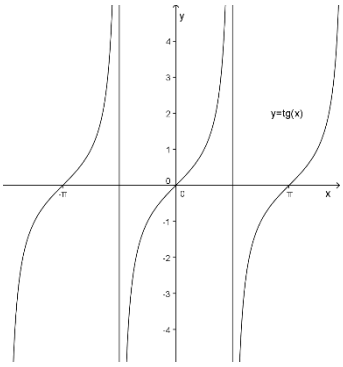
$$f(x) = senx$$ (funzione *seno* o *sinusoide*)



$$f(x) = cosx$$ (funzione *coseno* o *cosinusoide*)



$f(x) = tgx$ (funzione *tangente* o *tangentoide*)



Osservazione.

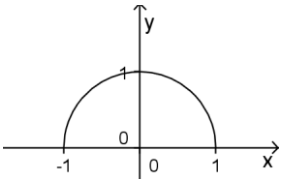
Le funzioni esponenziali e logaritmiche e le trigonometriche vengono classificate come funzioni *trascendenti* (niente di filosofico!), in opposizione a tutte le altre, che vengono dette *algebriche*. Queste ultime vengono classificate tali in quanto nella loro espressione analitica sono coinvolte soltanto le quattro operazioni aritmetiche insieme con le operazioni di potenza e estrazione di radice.

A questo si aggiunga che, se l'espressione analitica di una funzione contiene radicali al cui interno è presente la variabile indipendente, allora la funzione viene detta *irrazionale*.

Qui mi limito a portare un solo esempio, peraltro importante, rappresentato dalla funzione definita da

$$y = \sqrt{1 - x^2}$$

il cui grafico è la semicirconferenza di centro O, origine degli assi, e raggio $r = 1$, situata al di sopra dell'asse *x*.



* * * * *

3. <u>*Calcolo del dominio di una funzione numerica*</u> − <u>*Intervalli*</u>.

Quando si assegna una funzione $f : A \to B$, di norma, si conoscono sia il dominio A sia il codominio B. Capita spesso, tuttavia, che una funzione numerica reale sia data assegnando la formula che lega tra loro le due variabili reali x e y, senza però specificarne il dominio; senza specificare cioè quali sono i valori reali che la variabile indipendente deve assumere. In tali casi, è sottointeso che il dominio della funzione sia il suo *dominio naturale*, vale a dire l'insieme $A \subseteq \boldsymbol{R}$ che costituisce *il più grande sottoinsieme di* $\boldsymbol{R}$ (eventualmente tutto $\boldsymbol{R}$ stesso) *per cui la formula indicata ha senso nell'ambito dei numeri reali*. Detto altrimenti, il dominio naturale di una funzione numerica reale è l'insieme di tutti i numeri reali che possono essere assegnati alla variabile *x* in modo tale che le operazioni da eseguire su *x* , per ottenere i corrispondenti valori di *y*, siano sempre possibili; non possono cioè appartenere al dominio di una funzione eventuali valori di x per i quali le operazioni algebriche da eseguire per calcolare y risultino impossibili o indeterminate, come sono, per esempio, la divisione per 0, l'estrazione di radici con indice pari di numeri negativi, i logaritmi di numeri ≤ 0, per citare i casi più frequenti.

Molto spesso il dominio delle funzioni che frequentemente si studiano è rappresentato da particolari sottoinsiemi di $\boldsymbol{R}$ detti <u>*intervalli*</u>.
Se a e b sono due numeri reali, con $a < b$, per *intervallo* di *estremi* a (sinistro) e b (destro) si intende l'insieme di *tutti* i numeri reali x compresi tra a e b. Gli estremi, entrambi o uno solo dei due, possono appartenere o no all'intervallo stesso; si hanno quindi i seguenti tipi di intervalli:

$[a;b] = \{x \in R : a \leq x \leq b\}$ intervallo *chiuso*, cioè estremi inclusi, e *limitato* (dagli estremi a e b);

$(a;b) = \{x \in R : a < x < b\}$ intervallo *aperto*, cioè estremi esclusi, e *limitato*;

$[a;b) = \{x \in R : a \leq x < b\}$ intervallo *chiuso a sinistra* e *aperto a destra*, e *limitato*;

$(a;b] = \{x \in R : a < x \leq b\}$ intervallo *aperto a sinistra* e *chiuso a destra*, e *limitato*;

Si noti che, in tutti i casi sopra elencati, l'intervallo è costituito da *tutti* i punti del segmento della retta reale avente per estremi i punti a e b ; questi ultimi possono farne parte oppure no, e vengono detti anche, rispettivamente, *estremo inferiore* e *estremo superiore* dell'intervallo.

Sono invece *illimitati* (*chiusi* o *aperti*) gli intervalli in cui uno almeno degli estremi coincide con $+\infty$ o con $-\infty$.

Precisamente, sono intervalli *illimitati e chiusi* i seguenti due intervalli:

$$[a;+\infty) = \{x \in R : x \geq a\} \qquad \text{oppure} \qquad (-\infty;b] = \{x \in R : x \leq b\}$$

mentre sono *illimitati* e *aperti* questi altri due:

$$(a;+\infty) = \{x \in R : x > a\} \qquad \text{oppure} \qquad (-\infty;b) = \{x \in R : x < b\}$$

Si tratta ovviamente di semirette aventi origine in a o in b.

In particolare, è *illimitato aperto* l'intervallo $(-\infty;+\infty)$ che rappresenta tutto l'insieme dei numeri reali:

$$\boldsymbol{R} = (-\infty;+\infty)$$

ovvero l'intera retta reale.

Introduciamo qui anche la nozione di <u>*intorno*</u> di un punto, molto utile in tante questioni, in particolare per la nozione di limite di una funzione.

<u>Definizione</u>. *Intorno* di un punto è un *qualsiasi intervallo aperto che contenga al suo interno il punto stesso*.

Per indicare un intorno del punto x_0 si scrive

$$(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

dove δ è un numero reale positivo detto *raggio* dell'intorno. I punti che fanno parte di questo intorno sono tutti e soli i punti x tali che risulti

$$x_0 - \delta < x < x_0 + \delta \qquad \text{ovvero} \qquad |x - x_0| < \delta$$

A volte, di un punto x_0 è utile considerare solo l'*intorno destro*

$$(x_0, x_0 + \delta)$$

o solo l'*intorno sinistro*

$$(x_0 - \delta, x_0)$$

* * * *

Passiamo ora a occuparci del dominio delle funzioni elencate in precedenza. Per indicare il dominio di una funzione useremo, di preferenza, la lettera *D* o anche la lettera *I*, iniziale di intervallo.

a) Le *funzioni polinomiali*

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0$$

sono definite per qualsiasi valore reale di x; si ha cioè $D = \boldsymbol{R}$ in quanto, $\forall x \in \boldsymbol{R}$, le operazioni da eseguire per calcolare il corrispondente valore di y sono sempre possibili, com'è immediato constatare.

b) La *funzione esponenziale*

$$f(x) = a^x$$

dove a è un numero reale positivo, *è definita per qualsiasi valore di reale di* x; si ha cioè $D = \boldsymbol{R}$ in quanto, $\forall x \in \boldsymbol{R}$, l'operazione da eseguire per calcolare il corrispondente valore di y è sempre possibile, e ha un unico risultato.

Quanto detto vale anche, ovviamente, nel caso in cui sia $a = e$, cioè per la funzione esponenziale

$$f(x) = e^x .$$

Si aggiunga inoltre che la funzione esponenziale è *sempre positiva*, in quanto la base è un numero positivo. Il grafico di tale funzione si trova quindi tutto nel semipiano delle *y* positive (invito lo studente a rivedere il grafico della funzione esponenziale mostrato in precedenza).

b) Per quanto riguarda la *funzione logaritmica*

$$f(x) = log_a x$$

dove a è numero reale positivo e diverso da 1, e, in particolare, la funzione

$$f(x) = \ln(x)$$

essa *è definita solo per* $x > 0$ in quanto dalla definizione di logaritmo segue che, in $\boldsymbol{R}$, non esiste $log_a x$ se è $x \leq 0$.

Usando le notazioni prima introdotte per indicare gli intervalli, scriveremo che il dominio della funzione logaritmica è l'intervallo

$$I = (0;\ +\infty)$$

E infatti, il grafico della funzione logaritmica (lo studente controlli), si trova solo nel I e nel IV quadrante, dove, appunto, le ascisse sono positive.

d) Le *funzioni trigonometriche*

$$f(x) = senx \quad \text{e} \quad f(x) = cosx$$

dette anche funzioni *circolari*, *sono definite per qualsiasi valore di reale di* x; risulta cioè $D = \boldsymbol{R}$, in quanto, dalla definizione di seno e coseno di un angolo, segue che, per ogni valore reale di x, è possibile calcolare $senx$ e $\cos x$.

e) La *funzione tangente*

$$f(x) = tgx$$

essendo $tgx = \dfrac{senx}{\cos x}$, *è definita per quei valori di* x *in corrispondenza ai quali risulta* $\cos x \neq 0$ e cioè $\forall x \in \boldsymbol{R} : x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$. Ciò implica che il grafico della funzione tangente non può intersecare nessuna delle rette di equazione $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, le quali, come si vedrà, sono *asintoti verticali* (lo studente riveda il grafico della funzione tangente).

f) La funzione

$$y = \frac{1}{x}$$

è definita $\forall x \in \boldsymbol{R}$ tranne, chiaramente, per $x = 0$; il suo dominio può essere indicato come l'insieme $\boldsymbol{R} - \{0\}$, cioè tutti i numeri reali escluso lo zero, oppure, il che è lo stesso, come l'insieme unione di due intervalli illimitati aperti: $D = (-\infty;0) \cup (0;+\infty)$.

Il grafico pertanto non può intersecare la retta $x = 0$, cioè l'asse y, che, come lo studente può verificare, è *asintoto verticale*.

g) la funzione

$$y = \sqrt{1 - x^2}$$

è definita solo per i valori di x tali che risulti $1 - x^2 \geq 0$, in quanto in $\boldsymbol{R}$ non esiste la radice quadrata di un numero negativo; poiché la disequazione $1 - x^2 \geq 0$ è verificata $\forall x \in R : -1 \leq x \leq 1$, il dominio della funzione è l'intervallo chiuso e limitato $I = [-1;1]$. Lo studente riveda il grafico anche di questa funzione.

Osservazione. Per indicare una funzione, ho utilizzato al primo membro dell'equazione sia la scrittura $f(x)$ sia, semplicemente, la lettera y, in quanto entrambe le scritture sono usate regolarmente nei libri di testo; tuttavia, la prima è preferibile in generale, mentre in alcuni casi scrivere y al primo membro risulta quasi naturale (vedi per esempio l'equazione della retta o della parabola). Lo studente rilegga comunque la nota a) di pag,5.